**Dibujo con letras blancas

Descripción generada automáticamente con confianza media**

**Proyecto de grado en Ingeniería Electrónica**

**Diseño de Planta de Control de bajo costo para uso educativo**

**Santiago Martínez Castaño**  
Código: 201612223  
s.martinezc@uniandes.edu.co

Asesor  
**José Fernando Jiménez**  
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica  
Universidad de los Andes

**UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
FACULTAD DE INGENIERIA  
DEPARTAMENTO DE INGENIRÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA  
BOGOTA D.C 2022**

Contenido

[1. Introducción 4](#_Toc92919686)

[2. Metodología 4](#_Toc92919687)

[3. Planta 6](#_Toc92919688)

[3.1 Elección de la planta 6](#_Toc92919689)

[3.2 Diseño de la planta de control 7](#_Toc92919690)

[3.2.1 Diseño Mecánico 7](#_Toc92919691)

[4. Caracterización de la planta 9](#_Toc92919692)

[4.1 Péndulo invertido simple 9](#_Toc92919693)

[4.2 Modelo dinámico de la planta 10](#_Toc92919694)

[4.3 Espacio de estados y linealización 10](#_Toc92919695)

[4.4 Análisis del sistema 11](#_Toc92919696)

[5. Simulación de la planta 12](#_Toc92919697)

[5.1 Representación con modelo 3D 12](#_Toc92919698)

[5.2 Representación con modelo matemático 13](#_Toc92919699)

[6. Diseño de controladores 15](#_Toc92919700)

[6.1 Controlador PID 15](#_Toc92919701)

[6.1.1 Planta física 17](#_Toc92919702)

[6.2 Control por LQR 18](#_Toc92919703)

[6.3 Control por retroalimentación de estado (*Pole Placement*) 20](#_Toc92919704)

[6.4 Otros tipos de control 20](#_Toc92919705)

**Capítulo 1**

1. Introducción

Actualmente la industria presenta un problema de talento humano. No se encuentran personal suficientemente capacitadas para desarrollar los retos de la industria moderna. Este problema puede deberse a la falta de profesionales dedicados al área STEM (por sus siglas en inglés para Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas).

Para suplir esta carencia se debería incentivar, en los estudiantes de educación media, el deseo de estudiar una carrera orientada a STEM. Este proyecto busca despertar en los estudiantes esta motivación mediante el desarrollo de una planta de control que les resulte atractiva, interesante y que despierte el deseo de conocer más a profundidad su funcionamiento.

Por otra parte, la carencia de un hilo conductor en el estudio de la teoría de control produce profesionales subcualificados, que luego requieren un tiempo adicional a su educación universitaria para completar su formación en el área con las prácticas y técnicas realmente usadas en la industria.

Como beneficio adicional al incremento de motivación en carreras STEM, la planta propuesta en este proyecto procura ser ese hilo conductor de los estudiantes en el área de control.

1. Metodología

En busca de los objetivos de este proyecto se usa la siguiente metodología:

* Elegir una planta de control

La planta debe ser lo suficientemente simple al entendimiento de un estudiante preuniversitario, pero adaptable a diferentes niveles de educación avanzada.

* Diseño de la planta
* Caracterización de la planta
* Simulaciones

En esta sección se pretende conocer el alcance de la planta y sus limitaciones, para luego iniciar el diseño de controladores.

* Diseño de controladores
* Implementación del control

Basados en las limitaciones de la planta se implementan métodos de control que cumplan con los requerimientos de esta.

* Encuesta inicial a los estudiantes
* Capacitación de los estudiantes
* Encuesta final a los estudiantes

Se hará una primera encuesta a los estudiantes antes de familiarizarse con la planta, luego se les explicará la construcción y se les enseñará a emplear diferentes métodos de control en esta planta. Después de haber utilizado la planta por algún tiempo se realizará otra encuesta para medir el posible impacto que haya generado en sus expectativas de elección de carrera profesional.

El documento se presenta siguiendo la secuencia de las actividades descritas en esta metodología.

**Capítulo 2**

1. Planta

## Elección de la planta

La selección de la planta se basó en los siguientes requerimientos:

* Debe poderse construir con un bajo presupuesto (< $500 000 COP)
* Deben permitir implementar diferentes tipos de control
* Debe ser posible aumentar gradualmente la complejidad del aprendizaje
* Debe funcionar como una plataforma educativa tanto para estudiantes de colegio, como para universitarios

De este modo se preseleccionaron una variedad de plantas, tales como la planta Beam & Ball, un canal de riego a escala, control de posición de un objeto en un riel, entre otras. Pero se seleccionó un robot balancín de dos ruedas, dado que permite aplicar variedad de modelos de control, tales como: On/Off, PID, control difuso, regulador linear cuadrático, entre otros; permitiendo aumentar la complejidad del estudio de la planta. Adicionalmente, puede ser usada como una plataforma de robótica para aprender Odometría, Mapping y planeación de ruta, permitiendo que sea usada también a lo largo de la carrera universitaria como una plataforma educativa por niveles, siendo un hilo conductor entre diversas asignaturas de estudio.

Esta planta se basa en el modelo de Péndulo Invertido, el cual tiene numerosas aplicaciones visibles en la cotidianidad como se ejemplifica en la Figura 1; a) los vehículos eléctricos como el *Segway* o el *Onewheel* son medios de transporte que emplean un controlador para el péndulo invertido; b) la forma en que girar el cuerpo al manejar una bicicleta se modela también de esta forma; c) Incluso el desplazamiento del cuerpo humano es un péndulo invertido que balancea la parte superior sobre los tobillos en cada paso [1].

Diagram

Description automatically generated with medium confidence

Figura 1. a) Vehículo Onewheel. Tomado de [2]. b) Giro en una bicicleta. Tomado de [3]. c) Movimiento humano modelado como un péndulo invertido. Tomado de [1]

La simplicidad del modelo de referencia del péndulo invertido permite que los estudiantes preuniversitarios se familiaricen rápidamente con él, y evidencien su aplicación en diferentes sistemas, esto facilita la comprensión de la planta y permite que entiendan mejor las acciones de control sobre esta. Sin embargo, aunque el modelo es simple, la naturaleza del sistema es de alto interés investigativo en el área de control; esta planta es controlada de manera *sub-actuada*, es decir, el número de entradas es menor que el número de grados de libertad que requieren ser controlados (ángulo de inclinación y desplazamiento).

Por lo tanto, esta planta cumple la doble función de ser simple en entendimiento, pero adaptable a diferentes niveles de educación avanzada.

## Diseño de la planta de control

El diseño del robot balancín de dos ruedas se divide en 3 etapas: el diseño mecánico, el diseño electrónico y el diseño del sistema operativo base para su uso.

### Diseño Mecánico

La planta debe poderse construir con bajo presupuesto, por esto se ha diseñado la planta de manera que la mayoría de las piezas sean impresas en 3D, esto permite una producción de bajo costo a bajo volumen, puesto que, si la cantidad de unidades requeridas fuese alta sería más rentable crear un molde de inyección para las piezas. Además, dado que esta planta está pensada para el trabajo en equipo (colaborativo), se emplea una sola planta por un grupo de estudiantes.

A picture containing handcart, table

Description automatically generated

Figura 2. Render del diseño mecánico inicial

En la Figura 2 se observa el diseño inicial del robot balancín de dos ruedas. Es de anotar que tanto las bases blancas como la parte interna de las llantas fueron diseñadas para imprimir en 3D con material PLA y se emplea TPU para la parte externa de la llanta, lo cual permite un mejor agarre con el suelo. Los espaciadores son una pieza estándar de latón, de bajo costo alta disponibilidad.

**Capítulo 3**

1. Caracterización de la planta

El sistema péndulo invertido es un problema tradicional de dinámica y teoría de control, siendo sus principales enfoques el control de inclinación, estabilidad y seguimiento de trayectoria. En el presente informe se estudia el problema del equilibrio y estabilización de un péndulo físico ante perturbaciones externas.

Tras una revisión de la literatura disponible, se encuentra que muchos investigadores han propuestos numerosas técnicas de análisis y diseños de controladores para que un robot balancín de dos ruedas pueda permanecer estable en la posición vertical. Usando un modelo lineal de espacio de estados (*State-Space model*) se propone el control de movimiento del sistema [4]. En [5], un controlador de lógica difusa es diseñado y probado en un péndulo sobre riel. En [6], usando las ecuaciones de Newton se deriva la dinámica del sistema y se linealiza alrededor de un punto de operación para diseñar el controlador.

Este trabajo se centra en el acercamiento de la mecánica newtoniana, se plantean las ecuaciones de la dinámica del sistema basado en un modelo de péndulo invertido simple, estas se derivan y se obtiene un modelo de espacio de estados. El modelo lineal del espacio de estados se obtiene al asumir que el péndulo opera alrededor del punto de estabilización y que las señales involucradas son suficientemente pequeñas [7].

## Péndulo invertido simple

El modelo simple de un péndulo invertido se puede observar en la Figura 3, en este se asume que una masa puntual está conectada a una base con masa a través de un cuerpo con masa despreciable de longitud .

A picture containing text, device

Description automatically generated

Figura 3. Modelo del péndulo invertido

Las variables de interés son que representa el desplazamiento del péndulo en el eje horizontal y que representa el ángulo de inclinación del péndulo con respecto al horizontal. Para este modelo se asume que la entrada es una fuerza.

## Modelo dinámico de la planta

Las ecuaciones de movimiento de la planta descrita se pueden derivar empleando métodos como el de Newton-Euler o Lagrange-Formalism, entre otros. Las matrices resultantes de interés serán iguales y en todo caso un sistema no-lineal de la siguiente forma:

Con,

Donde y son los factores de amortiguamiento de las uniones entre la base y el suelo y la unión de rotación entre la base y el cuerpo, respectivamente.

## Espacio de estados y linealización

Se puede obtener una representación en espacio de estados usando la ecuación dinámica del sistema presentada anteriormente y definiendo el vector

Linealizando alrededor del punto de operación da como resultado el espacio de estados lineal del sistema:

Donde,

De acuerdo con la sección 3.2.1 de este informe se tiene los siguientes valores para los parámetros del modelo:

## Análisis del sistema

Utilizando las matrices y encontradas en la sección anterior se puede analizar el comportamiento del sistema de péndulo invertido y, haciendo uso del software MATLAB® se puede estudiar y simular el comportamiento de este sistema, además de probar diferentes métodos de control sobre el mismo [8].

**Estabilidad:** Para analizar la estabilidad del sistema se emplea la función *pole()*, esta determina los polos de un sistema dinámico en lazo abierto. Para visualizar los polos del sistema se emplea la función *rlocus()* que grafica en el plano complejo los polos y ceros. En concreto, para este sistema se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 4.

Chart

Description automatically generated

Figura 4. Polos y ceros del sistema modelado

Es de notar que, entre los polos representados con una *x* en el diagrama, se resalta uno encontrado en el semiplano derecho, es decir que su parte real es mayor a 0. Esto implica que el sistema no es estable en lazo abierto, pero además no existe un Controlador Proporcional suficiente para estabilizar el sistema.

1. Simulación de la planta

Para analizar el comportamiento de la planta, y los métodos de control que se pueden diseñar sobre esta, se emplearon dos aproximaciones al modelado. La primera consiste en realizar un modelo 3D detallado, con la distribución de masas correcta y restricciones físicas involucradas en el movimiento de la planta. La segunda aproximación es simular el sistema de forma matemática empleando su modelo dinámico y las ecuaciones diferenciales que lo definen.

## Representación con modelo 3D

A partir de los archivos de diseño CAD de la planta, presentados en la sección 3.2.1 de este documento, se reconstruye un modelo físico de esta en un software de simulación con motor físico (*Physics Engine*) capaz de calcular las interacciones de cuerpos rígidos. Para este proyecto se emplea el software Simscape de Simulink®, el cuál utiliza la manipulación simbólica y la reducción de índices para identificar la formulación matemática que mejor representa el sistema [9].

Diagram, schematic

Description automatically generated

Figura 5. Modelo de la planta en Simscape

En la Figura 5 se puede observar el modelado a través de bloques que representan las piezas físicas del sistema, los bloques que se encuentran en la sección más a la derecha de la imagen. La aproximación en el cálculo de este modelo está altamente restringido a emplear la geometría y distribución de masa correcta en estos bloques. Observe también que en este modelo ya se han incluido dos diferentes controladores para el sistema, estos serán tratados más adelante en la sección XXX de este documento.

A picture containing LEGO, toy

Description automatically generated

Figura 6. Representación de la planta en Simscape

En la Figura 6 se muestra la representación que da Simscape a los bloques del modelo mostrado en la Figura 5. Se puede apreciar que esta representación varía con la imagen de la planta física mostrada en la sección XXX (ver FXXX), la placa electrónica de control no se ha incluido en el modelo de simulación ya que su masa es mucho menor que todos los demás elementos del sistema y, por lo tanto, despreciable para el cálculo del centro de gravedad. Además, la geometría de esta placa es compleja, y ya que su impacto en el modelo es mínimo, se ha decidido no modelarla, la masa de este elemento se ha distribuido entre los separadores de latón inferiores del cuerpo.

## Representación con modelo matemático

A partir de las ecuaciones dinámicas de la planta, presentadas en la sección 4.2, se construye una representación del espacio de estados del sistema. Para este proyecto se utilizó los bloques básicos de Simulink®, empleando un integrador se realimenta los estados a través de las matrices y características de la planta.

Diagram

Description automatically generated

Figura 7. Modelo de la planta en Simulink

En la Figura 7 se puede observar el modelado a través de bloques que representan las ecuaciones dinámicas del sistema. En la sección superior de la imagen se encuentra demarcado los bloques que componen la planta, note que como entrada se tiene la señal de acción , que al multiplicarse por la matriz y sumarse ase obtiene , el cuál pasa por un integrador para realimentar los estados. Observe también que en este modelo ya se ha incluido una retroalimentación al sistema, este tipo de control será tratado más adelante en la sección XXX de este documento.

**Capítulo 4**

1. Diseño de controladores

Como se explicó anteriormente, este tipo de planta tiene un alto interés en el estudio de la teoría de control por su complejidad. Aquí hay texto

## Controlador PID

Un controlador PID puede estabilizar una variable del sistema, este controlador podría emplearse para controlar el ángulo del péndulo invertido , despreciando su desplazamiento . Sin embargo, esta planta es vista como un sistema MISO (*Single-Input-Multiple-Output*) dado que la única entrada del sistema es la velocidad de rotación de las llantas, y se desea controlar tanto el ángulo de inclinación como el desplazamiento horizontal [10]. Por este motivo un controlador PID no es suficiente, como se demostrará en este documento, el uso de controladores PID en cascada es posible, como han demostrado investigadores en el área, pero resulta ineficiente ante impulsos externos [7].

En los modelos de simulación presentados en la sección 5 se implementó un controlador PID en tiempo discreto como se observa en la Figura 8. El periodo de muestreo de señales para este controlador es de , igual al periodo de muestreo en el microcontrolador que implementa la planta física.

Diagram

Description automatically generated

Figura 8. Controlador PID implementado en simulación

Para sintonizar este controlador se utilizó la herramienta incorporada en Simulink® para este fin, el *PID-Tunner* permite ingresar la función de transferencia de un sistema o deducirla del modelo 3D.

Chart, line chart

Description automatically generated

Figura 9. Ángulo de inclinación del sistema controlado con PID

Una vez se ha determinado el valor de las constantes del controlador, se obtuvo la respuesta de la planta mostrada en la Figura 9. El controlador resulta efectivo para reducir el error del ángulo de inclinación a un valor cercano a 0°, con oscilaciones de baja amplitud y en un tiempo de establecimiento bajo.

Chart, line chart

Description automatically generated

Figura 10. Posición horizontal del sistema controlado con PID

No obstante, como se observa en la Figura 10, la posición de la planta aumenta indefinidamente tras estabilizarse el ángulo de inclinación. Como se había explicado anteriormente, un controlador PID no es capaz de controlar las dos variables de interés del sistema.

### Planta física

Para el control de la planta física se implementó un PID discreto en el microcontrolador seleccionado, este controlador presenta las siguientes ecuaciones para cada acción de control:

Donde representa el tiempo discreto en que se toma la muestra, es la señal de error, es la señal medida y es el periodo de muestreo discreto. En la Figura 10 se observa a una estudiante familiarizándose y utilizando la planta de control física, primero se le explicó cómo afectan cada acción , y al control del sistema, luego se le muestra estos efectos con una prueba sin contacto con el suelo, finalmente se le permite modificar los valores de estas constantes libremente para intentar hallar un buen controlador.

A picture containing text, person, indoor

Description automatically generated

Figura 11. Estudiante familiarizándose y utilizando la planta

Para guiar el proceso de sintonización se le explica una versión simple del método de Ziegler–Nichols, donde primero se busca una oscilación sostenida con la constante , luego se reducen las oscilaciones con la constante y finalmente se ajusta el error en el tiempo con la constante .

Realizando este proceso de sintonización manual del controlador la estudiante logra que la planta mantenga el ángulo de inclinación del péndulo invertido cercano a 0°. Sin embargo, para lograr esto el sistema se desplaza de manera horizontal indefinidamente, mostrando que el controlador PID solo puede controlar una de las variables de interés.

## Control por LQR

Para controlar un sistema lineal de múltiples salidas, o estados de interés, se puede emplear un Regulador Lineal Cuadrático [6]. En nuestro caso, utilizaremos la linealización del sistema presentada en la sección 4.3, donde se representa el sistema con las matrices y . La representación del sistema se muestra en la Figura 7.

Para este tipo de control, se introduce una matriz de costo , la cual representa el peso de cada estado, un estado con mayor peso llegará más rápido a su valor deseado. La acción de control que se introduce al sistema se determina de la siguiente forma:

Donde es la matriz de ganancia óptima, definida como:

Similar a la matriz , el vector representa el peso de las señales de control. se soluciona a través de la ecuación de Riccatti:

Siempre que el espacio de estado sea observable y controlable, el vector tiene una solución única tal que los polos del sistema en lazo cerrado están en el lado izquierdo del semiplano complejo, haciendo al sistema estable [6].

Chart, line chart

Description automatically generated

Figura 12. Ángulo de inclinación del sistema controlado con LQR

Una forma de variar la acción del controlador es modificar los pesos de los estados y los actuadores dados por las matrices y, pero para estas simulaciones se tomaron todos los pesos como . En la Figura 12 se observa la respuesta del sistema para el estado del ángulo de inclinación, con este controlador se logra llevar el valor del ángulo a un valor cercano a 0°, con un *overshoot* pequeño, pero con un tiempo de establecimiento grande el cual puede ser reducido modificando el valor de .

Chart, line chart

Description automatically generated

Figura 13. Posición horizontal del sistema controlado con LQR

Al contrario de lo ocurrido con el controlador PID mostrado en la sección anterior, este controlador logra reducir el error de desplazamiento a , como se observa en la Figura 13. Con este controlador podría incluso lograrse el seguimiento de trayectoria de un robot balancín de dos ruedas si el valor de referencia de posición se cambia a lo largo del tiempo, manteniendo siempre el péndulo balanceado en la posición vertical .

## Control por retroalimentación de estado (*Pole Placement*)

Como se determinó en la sección 4.4, al menos uno de los polos del sistema se encuentra en el semiplano derecho del plano complejo, haciendo al sistema inestable en lazo abierto. La idea principal de este método de control es hallar una acción de control tal que todos los polos del sistema en lazo cerrado se encuentren en el semiplano izquierdo, de la forma:

Donde representa la matriz de retroalimentación, que fuerza los valores propios del sistema en lazo cerrado a las ubicaciones de los polos especificadas por la ecuación característica deseada [11].

Empleando el mismo modelo mostrado en la Figura 7 se puede simular la respuesta del sistema para una nueva matriz , la cual fuerce los polos a un valor deseado. Utilizando Matlab® se puede determinar la solución a este problema a través de la función *acker()*, la cual soluciona la fórmula de Ackermann para un vector de polos deseados.

## Otros tipos de control

Como se ha mencionado anteriormente, el péndulo invertido es una planta de alto interés en la teoría de control. Este ha sido utilizado ampliamente como banco de pruebas de modelos de control, permitiendo realizar comparaciones sobre un mismo hardware [10]. Por sus múltiples estados se pueden realizar controles independientes sobre estos, lo que permite combinar algoritmos de control para hacer más eficiente el control de cada estado y así optimizar su uso como plataforma de robótica [12].

**Capítulo 5**

1. Encu?